2-BOYUTLU LANGLANDS KARŞILIKLILIK İLKESİ : M. M. KAPRANOV'UN ÇALIŞMASI ÜZERİNE NOTLAR

KÂZIM İLHAN İKEDA

ÖZET. Bu çalışmada M. M. Kapranov'un *"Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory"* adlı çalışması ana hatlarıyla özetlenmiştir.

1. GİRİŞ

Çağdaş sayılar kuramının en önemli açık problemlerinden birisi, verilen "aritmetik yönünden ilginç" bir F cisminin G_F mutlak Galois grubunun ve bu grubun barındırdığı aritmetik yapının; Galois kuramı neticesinde, F cisminin ayrışabilir genişlemelerinin ve bu genişlemelerin aritmetik yapılarının; F taban cismine bağlı objeler cinsinden betimlenmesi problemidir. Bu problem, F'nin bir küresel (= global) veya yerel (= lokal) cisim olması durumunda bu cismin *abelyen genişlemeleri* için, 20. yüzyıl'ın ilk yarısında, Takagi, Artin, Hasse ve Chevalley başta olmak üzere pek çok matematikçinin gayretiyle çüzülmüş, böylece *küresel ve yerel sınıf cisim kuramları* oluşmuştur (bkz. [19]). Bu iki (yakından alakalı) teori günümüz sayılar kuramında çok önemli ve merkezi bir yere sahiptir.

Yerel ve küresel sınıf cisim kuramı daha sonra iki farklı yönde genelleştirilmiştir. Bu kuramın F küresel veya yerel cisminin *abelyen olmayan* genişlemelerini de içerecek şekilde genelleştirilmesi, ve bu genel teorinin inşa edilmesi, çağdaş sayılar kuramındaki en önemli birkaç problemden birisidir. Bu problemi çözmek için hem küresel hem de yerel cisimler için Langlands'ın otomorfik temsiller kullanarak öngördüğü olabilecek en genel yaklaşım vardır (bkz. [1, 8] ve [15, 16, 17, 18]). Öte yandan, taban cisim F'nin *"yüksek boyutlu" yerel ve küresel cisim* olduğu durumda Kato ve Parshin, K-kuramı yardımı ile, bu yüksek-boyutlu F cisminin *abelyen genişlemeleri* için yerel ve küresel sınıf cisim kuramını genellemişlerdir (bkz. [12, 13, 14], ve [22, 23, 24, 25]).

Bu durumda, doğal olarak, Kato ve Parshin'in inşa etmiş olduğu yüksek boyutlu yerel ve küresel (K-kuramsal) sınıf cisim kuramları için Langlands'ın öngörülerini genelleştirmek, yani "yüksek boyutlu Langlands kuramı" inşa etmek son derece önemli bir soru olarak karşımıza çıkmaktadır.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{GL}(\bullet)\text{ grubu için}\\ \text{Kapranov}\\ \text{karşılıklılık ilkesi}\end{array}} \arrow[dl, "\text{boyut}=1"'] \arrow[dr, "n=1"] & \\
\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{GL}(\bullet)\text{ grubu için}\\ \text{Langlands}\\ \text{karşılıklılık ilkesi}\end{array}} \arrow[dr, "n=1"'] & & \boxed{\begin{array}{c}\text{Kato-Parshin}\\ \text{sınıf cisim kuramı}\end{array}} \arrow[dl, "\text{boyut}=1"] \\
 & \boxed{\begin{array}{c}\text{Artin-Takagi}\\ \text{sınıf cisim kuramı}\end{array}} &
\end{tikzcd}
$$

Bu önemli soru üzerine yapılmış yegane inceleme M. M. Kapranov tarafından yapılmıştır (bkz. [11]). Kapranov'un kuramının *"topolojik kuantum alan kuramı"* ile yakından ilgili olduğu düşünülmektedir.

Fizikçilerin de ilgisini çekebilecek bu kısa makalede, Kapranov'un bu önemli çalışması çok kısa olarak, yazarın özgün katkısı *olmadan*, özetlenmiştir (ayrıca bkz. [10, 26]).

Date: 9 Ekim 2012.
Yazar 107T728 numaralı TÜBİTAK projesi ile kısmen desteklenmiştir.
Prof. Dr. A. Verçin'e çalışmama göstermiş olduğu ilgiden dolayı kalpten teşekkürlerimi sunarım.

2. F CİSMİ ÜZERİNDE TANIMLI VE A-KATSAYILI $\mathscr{M}_F(A)$ MOTİFLER KATEGORİSİ

F yerel veya küresel cisminin W_F mutlak Weil grubunun n-boyutlu ℓ-sel temsillerinin kuramsal altyapısını Grothendieck'in ilk olarak varlığını öngördüğü ve halen hipotetik olan "motif" kavramı oluşturur (bkz. [5, 17, 27]).

Genel olarak, herhangi bir F cismi için, $\mathscr{M}_F$ ile F üzerinde tanımlı karışık motiflerin abelyen kategorisini gösterelim (bkz. [6, 21]). Bu durumda, $\mathscr{M}_F$ kategorisinin her V objesinin ℓ-sel, p-sel, Betti ve de Rham *"anlamlandırmaları"* $V_{\mathbb{Q}_\ell}$, $V_{\mathbb{Q}_p}$, V_{Betti} ve V_{deRham} aralarında tanımlı *"karşılaştırma izomorfizmaları"* ile mevcuttur. Ayrıca, F üzerinde tanımlı her cebirsel çokluk X için $h^i(X)$ objeleri $\mathscr{M}_F$ kategorisinde tanımlıdır; örneğin $h^2(\mathbb{P}^1)$ objesi $\mathbb{Z}(1)$ ile gösterilen *Tate motifidir*. Bu durumda, $V = h^i(X)$ objesinin ℓ-sel anlamlandırması $V_{\mathbb{Q}_\ell}$ ile X cebirsel çokluğunun ℓ-sel kohomolojisi $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ elde edilir. Değişmeli ve birim elemanlı bir halka A olsun. Bu durumda, $\mathscr{M}_F(A)$ ile F cismi üzerinde tanımlı ve A-katsayılı motiflerin kategorisi gösterilecektir.

Sonuç olarak, yerel veya küresel cisim F üzerinde her $1 \leq n \in \mathbb{Z}$ olması kaydı ile $\mathrm{GL}(n)$ grubu için tanımlı yerel veya küresel Langlands karşılıklılık ilkesinde yer alan W_F[1] grubunun n-boyutlu ℓ-sel temsillerinin denklik sınıflarından oluşan $\bigsqcup_n \mathsf{Rep}^{(n)}(W_F;\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ kategorisi yerine F üzerinde tanımlı $\mathscr{M}_F(F)$ motifler kategorisi incelenecektir.

3. $\mathrm{GL}(\bullet)$ GRUBU İÇİN YEREL KAPRANOV KARŞILIKLILIK İLKESİ

Bu kısımda 2-boyutlu bir F yerel cismi sabitlenecektir. Ayrıca, bu F cismi üzerinde tanımlı ve F-katsayılı motiflerin kategorisi $\mathscr{M}_F(F) = \mathscr{M}$ ile gösterilecektir. Her $0 \leq n$ için, $\mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$ motifi de $\mathbb{Z}(n)$ biçiminde gösterilecektir. $\mathscr{M}$ motifler kategorisinin, her V objesi için, $\alpha(V) = V_F$ ile belirtilen $\alpha_F : \mathscr{M} \to \mathscr{V}_F$ anlamlandırma fonktöründen, her V objesi için, $f(V) = \alpha(V) \oplus \alpha(V)$ ile tanımlı $f : \mathscr{M} \to \mathscr{V}_F$ kesin fonktörü türetilir.

Tanım 1. *$\mathscr{M}$ kategorisinde tanımlı*

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

kısa kesin dizisinde

$$W' \simeq W'' \otimes \mathbb{Z}(n) \qquad (0 < n)$$

*izomorfizmasını sağlayacak V' ve V'' objelerinin W' ve W'' altbölüm objeleri mevcut ise, bu kısa kesin diziye **makul olmayan** dizidir denir. Bu özellikte olmayan kısa kesin dizilere de **makul**dur denir.*

Tanım 2. *Bir V motifinin uzunluğu n olan $V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ süzümü verilsin. Eğer, her $1 \leq i \leq j \leq n$ şartını sağlayan i, j tamsayıları için tanımlı*

$$0 \to V_i \to V_j \to V_j/V_i \to 0$$

kısa kesin dizi makul ise, V motifinin bu süzümüne makuldür denir.

Yukarıdaki iki tanım Bernstein ve Zelevinski'nin p-sel grupların temsil kuramı üzerine yapmış oldukları çalışma (bkz. [4]) sonucu türetilmiştir. Şimdi, $\mathscr{E}_{\mathscr{M}} = \mathscr{E}$ ile $\mathscr{M}$ kategorisinde tanımlı makul kısa kesin dizilerin sınıfı gösterilsin. Tanımlanmış olan $f : \mathscr{M} \to \mathscr{V}_F$ kesin fonktörü ve $\mathscr{E}$ makul kısa kesin diziler sınıfına, $S(f,\mathscr{E})$ ile gösterilecek olan, bir Waldhausen uzayı (=Waldhausen ikili simpleksler kümesi) atanacaktır.

Bu $S(f,\mathscr{E})$ Waldhausen ikili simpleksler kümesini tanımlamak için (bkz. [7, 20] ve [30]) ilk olarak, her $0 \leq m \in \mathbb{Z}$ için, objeleri uzunluğu m olan $\mathscr{M}$ kategorisinde tanımlı makul süzümlerden oluşan $S_m(f,\mathscr{E})$ kategorisini tanımlayalım. Bu durumda, $S_m(f,\mathscr{E})$ kategorisinin her $V_1 \subset \cdots \subset V_m$ ve $V'_1 \subset \cdots \subset V'_m$ objeleri arasında morfizmanın tanımlanabilmesi için ilk olarak, bu m uzunluğunda olan süzümlerin izomorfik olması gerekmektedir; yani, dik okların izomorfizma olduğu bir

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & V_2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, hook] & V_m \arrow[d] \\ V'_1 \arrow[r, hook] & V'_2 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & V'_m \end{tikzcd}$$

[1] F yerel cisim ise F'nin WA_F Weil-Arthur grubunun n-boyutlu kompleks temsilleri; F küresel cisim ise F'nin L_F Langlands grubunun n-boyutlu kompleks temsilleri (bkz. [2, 29]).

değişmeli çizgenin var olması gerekmektedir. Bu şartın verilen m uzunluklu $V_1 \subset \cdots \subset V_m$ ve $V_1' \subset \cdots \subset V_m'$ süzümleri için sağlandığı kabul edilirse, bu iki obje arasında bir T morfizması,

$$\begin{tikzcd}
\alpha(V_1)\oplus\alpha(V_1) \arrow[r, hook] \arrow[d, "T_1"'] & \alpha(V_2)\oplus\alpha(V_2) \arrow[r, hook] \arrow[d, "T_2"'] & \cdots \arrow[r, hook] & \alpha(V_m)\oplus\alpha(V_m) \arrow[d, "T_m"] \\
\alpha(V_1')\oplus\alpha(V_1') \arrow[r, hook] & \alpha(V_2')\oplus\alpha(V_2') \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & \alpha(V_m')\oplus\alpha(V_m')
\end{tikzcd}$$

çizgesini değişmeli kılan $T = (T_i)_{i=1}^m$ F-lineer dönüşümleri olarak tanımlıdır. Tanımlanan bu $S_\bullet(f,\mathscr{E})$ simpleksler kategorisinin $\mathrm{Nerv}(S_\bullet(f,\mathscr{E}))$ siniri bir ikili simpleksler kümesidir. Bu ikili simpleksler kümesinin $|\,\mathrm{Nerv}(S_\bullet(f,\mathscr{E}))\,|$ geometrik anlamlandırmasına $f : \mathscr{M} \to \mathscr{V}_F$ kesin fonktörü ve $\mathscr{E}$ makul kısa kesin diziler sınıfına atanmış olan $S(f,\mathscr{E})$ Waldhausen ikili simpleksler kümesi (veya Waldhausen uzayı) denir.

Şimdi, $S(f,\mathscr{E})$ Waldhausen ikili simpleksler kümesi açık olarak betimlenecektir. $S(f,\mathscr{E})$ uzayı $\Delta^p \times \Delta^q$ ikili simplekslerinden oluşan hücrelerin yapıştırılmasından oluşan bir *CW* kompleksi olduğu için, bu hücrelerin tanımlanması yeterlidir. $S(f,\mathscr{E})$ uzayının, düşük boyutlu hücreleri ise :

– 0-*hücreleri :* tek bir tane 0-hücresi vardır ve noktasaldır, bir objeli ve bir morfizmalı $S_0(f,\mathscr{E})$ kategorisinden gelir;

– 1-*hücreleri :* 1-hücreleri $\mathscr{M}$ motifler kategorisinin objeleri ile (veya denk olarak, $S_1(f,\mathscr{E})$ kategorisinin objeleri ile) $1-1$ eşleme altındadır;

– 2-*hücreleri :* $\Delta^1 \times \Delta^1$ ve Δ^2 şeklinde olan iki durum vardır.

Her izomorfik $V, W \in \mathrm{ob}(\mathscr{M})$ objeleri için ve $\mathscr{V}_F$ kategorisinde tanımlı her $f(V) \xrightarrow{g} f(W)$ izomorfizması için $\Delta^1 \times \Delta^1$ biçiminde bir 2-hücre vardır.

$\mathscr{M}$ motifler kategorisinden seçilmiş olan makul kısa kesin dizilerden oluşan $\mathscr{E}$ sınıfına ait her

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

kısa kesin dizisine karşılık Δ^2 şeklinde bir 2-hücre karşılık gelir.

– 3-*hücreleri :* $\Delta^2 \times \Delta^1$, $\Delta^1 \times \Delta^2$, ve Δ^3 şeklinde olan üç durum vardır.

Her izomorfik $U, V, W, \in \mathrm{ob}(\mathscr{M})$ objeleri için ve $\mathscr{V}_F$ kategorisinde tanımlı her $f(U) \xrightarrow{h} f(V) \xrightarrow{g} f(W)$ izomorfizma çifti için $\Delta^2 \times \Delta^1$ biçiminde bir 3-hücre vardır.

$\mathscr{M}$ motifler kategorisinden seçilmiş olan makul kısa kesin dizilerden oluşan $\mathscr{E}$ sınıfına ait her

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

ve

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$

izomorfik kısa kesin dizilerine ve $\mathscr{V}_F$ kategorisinde tanımlı

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f(V') \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & f(V) \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & f(V'') \arrow[r] \arrow[d, "g''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & f(W') \arrow[r] & f(W) \arrow[r] & f(W'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

çizgesini değişmeli yapan her $f(V') \xrightarrow{g'} f(W')$, $f(V) \xrightarrow{g} f(W)$, ve $f(V'') \xrightarrow{g''} f(W'')$ izomorfizma üçlüleri için $\Delta^1 \times \Delta^2$ biçiminde bir 3-hücre vardır.

$\mathscr{M}$ motifler kategorisinden seçilmiş olan uzunluğu 2 olan her $V_1 \subset V_2 \subset V$ makul süzümü için Δ^3 şeklinde bir 3-hücre vardır.

biçimindedir.

Şimdi, $S(f,\mathscr{E})$ Waldhausen uzayı üzerine belli bir "kombinatorik 2-kategoriler yığını" tanımlanacaktır. Bunun için, ilk olarak, bir X ikili simpleksler kümesi üzerine tanımlı kombinatorik 2-kategoriler yığınının genel tanımı hatırlatılacaktır.

Tanım 3. *X ile bir ikili simpleksler kümesi gösterilsin. Bu X üzerine tanımlı bir $\mathscr{S}$* ***kombinatorik*** *2-* ***kategoriler yığını****, X ikili simpleksler kümesinin :*

– *her x 0-hücresine karşılık bir $\mathscr{S}_x$ 2-kategorisi;*

– *her $e : x \to y$ 1-hücresine karşılık bir $\mathscr{S}_e : \mathscr{S}_x \to \mathscr{S}_y$ 2-fonktörü;*

– *her* σ *2-hücresine karşılık bir*

$$\mathscr{S}_\sigma : \prod_{e\in\partial_+(\sigma)} \mathscr{S}_e \Rightarrow \prod_{e\in\partial_+(\sigma)} \mathscr{S}_e$$

doğal dönüşümü;

– *her* τ *3-hücresine karşılık bir*

$$\mathscr{S}_\tau : \prod_{\sigma\in\partial_+(\tau)} \mathscr{S}_\sigma \Rrightarrow \prod_{\sigma\in\partial_+(\tau)} \mathscr{S}_\sigma$$

doğal dönüşümlerin değiştirimi

tekabül ettirir. Bu $\mathscr{S}$ *tekabülü, her* ρ *4-hücresi için* $\mathscr{S}_\tau$ *değiştirimlerinin* $\tau\in\partial_+(\rho)$ *üzerinden ve* $\tau\in\partial_-(\rho)$ *üzerinden yapıştırılmasının aynı olması uyumluluk şartını sağlamalıdır.*

Şimdi $\mathrm{GL}(\bullet)$ grubu için yerel Kapranov karşılıklılık ilkesi sanıtını ifade edebiliriz.

Sanıt 4 ($\mathrm{GL}(\bullet)$ **grubu için yerel Kapranov karşılıklılık ilkesi).** $S(f,\mathscr{E})$ *Waldhausen uzayı üzerine,*

– *biricik* 0*-hücresine karşılık* $2-\mathrm{Vek}_K$ *2-kategorisi (*$K=\mathbb{C}$ *veya* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*);*

– *her* 1*-hücresine, yani* $\mathscr{M}$ *motifler kategorisinin her* V *objesine karşılık,* $\mathbb{L}(V)$ *bir 2-vektör uzayını göstermesi kaydı ile,* $W\mapsto\mathbb{L}(V)\otimes W$ *tensör çarpımı ile tanımlı bir* $2-\mathrm{Vek}_K\to 2-\mathrm{Vek}_K$ *2-fonktörü;*

– *her* 2*-hücresine karşılık 2-fonktörler arası bir doğal dönüşüm karşılık gelmelidir.* $S(f,\mathscr{E})$ *Waldhausen uzayının inşasından :*

Her izomorfik $V,W\in\mathrm{ob}(\mathscr{M})$ *objeleri için ve* $\mathscr{V}_F$ *kategorisinde tanımlı her* $g: f(V)\to f(W)$ *izomorfizması için tanımlı* $\Delta^1\times\Delta^1$ *2-hücresine karşılık* $\mathbb{L}(g):\mathbb{L}(V)\to\mathbb{L}(W)$ *fonktörü,*

$\mathscr{M}$ *motifler kategorisinden seçilmiş olan makul kısa kesin dizilerden oluşan* $\mathscr{E}$ *sınıfına ait her*

$$0\to V'\to V\to V''\to 0$$

kısa kesin dizisini için tanımlı Δ^2 *2-hücre karşılık*

$$\mathbb{L}(V')\otimes\mathbb{L}(V'')\to\mathbb{L}(V)$$

fonktörü

– *her* 3*-hücresine karşılık doğal dönüşümler arası bir değiştirim*

tekabülleri ile tanımlı $\mathbb{L}_F^{(2)}=\mathbb{L}$ *kombinatorik 2-kategoriler yığını vardır.* $S(f,\mathscr{E})$ *Waldhausen uzayının inşasından dolayı*

$$V\rightsquigarrow\mathbb{L}(V)$$

eşlemesinde V *motifine atanan* $\mathbb{L}(V)$ *2-kategorisi üzerine* $\mathrm{GL}(V_F\oplus V_F)$ *grubunun etkisi vardır.*

4. GL($\bullet$) GRUBU İÇİN KÜRESEL KAPRANOV KARŞILIKLILIK İLKESİ

Bu kısımda, X ile 2-boyutlu bir şema gösterilecektir. Bu X şemasının rasyonel fonksiyonlar cismi de F ile gösterilecektir. Bu F cisminin X şemasının herhangi bir $\mathfrak{p}\in X_o\subset X$ zincirine göre $F(\mathfrak{p},X_o,X)$ tamlanışı 2-boyutlu bir yerel cisimdir. Böylece $\mathbb{A}_X=\prod'_{\mathfrak{p}\in X_o\subset X} F(\mathfrak{p},X_o,X)$ "kısıtlamalı direkt çarpımı" ile X şemasının Parshin-Beilinson adel halkası tanımlanır (bkz. [3, 9]).

$\mathscr{M}$ ile bu kez X şemasının fonksiyon cismi F üzerinde tanımlı ve F-katsayılı motiflerin $\mathscr{M}_F(F)$ kategorisi gösterilsin. Bu durumda, her $V\in\mathrm{ob}(\mathscr{M})$ motifinin adelsel $V_{\mathbb{A}_X}$ anlamlandırması vardır. Verilen her $\mathfrak{p}\in X_o\subset X$ zincirine karşılık 2-boyutlu $F(\mathfrak{p},X_o,X)$ yerel cismi üzerinde tanımlı ve $F(\mathfrak{p},X_o,X)$-katsayılı $V_{\mathfrak{p},X_o}$ motifi vardır. Dahası, hemen her 1-boyutlu $X_o\subset X$ altşeması için V motifi X_o şemasının genel noktası boyunca dallanmamış olacaktır. Sonuç olarak, V motifini kıstırarak X_o şemasının fonksiyon cismi üzerinde bir $V\mid_{X_o}$ motifi tanımlamak mümkündür. Dahası, bu $X_o\subset X$ altşeması için ve dallanmamış V için, her 0-boyutlu $\mathfrak{p}\in X_o$ altşeması için $\mathfrak{p}$ şemasının fonksiyon cismi üzerinde bir $V\mid_{\mathfrak{p}}$ motifi tanımlamak mümkündür.

Şimdi aşağıdaki $\mathrm{GL}(\bullet)$ grubu için *"otomorf" objeleri* tanımlayalım : Bir $V\in\mathrm{ob}(\mathscr{M})$ motifi verilsin.

– Her $\mathfrak{p}\in X_o\subset X$ zincirine karşılık gelen 2-boyutlu $F(\mathfrak{p},X_o,X)$ yerel cismi üzerinde tanımlı ve $F(\mathfrak{p},X_o,X)$-katsayılı $V_{\mathfrak{p},X_o}$ motifine, $\mathrm{GL}(\bullet)$ grubu için 2-boyutlu yerel Kapranov karşılıklılık ilkesi aracılığıyla, bir 2-vektör uzayı $\mathbb{L}(V_{\mathfrak{p},X_o})$ atanır. Böylece,

$$\mathbb{L}(V)=\bigotimes_{\mathfrak{p}\in X_o\subset X}\mathbb{L}(V_{\mathfrak{p},X_o})$$

2-vektör uzayı tanımlıdır. $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{A}_X} \oplus V_{\mathbb{A}_X})$ grubunun 2-vektör uzayı $\mathbb{L}(V)$ üzerine bir etkisi vardır.

– Hemen her 1-boyutlu $X_o \subset X$ altşeması için V motifi X_o şemasının genel noktası boyunca dallanmamış olsun. Böylece, V motifini kıstırarak X_o şemasının fonksiyon cismi üzerinde bir $V|_{X_o}$ motifi oluşur. $\mathrm{GL}(\bullet)$ grubu için küresel Langlands (=1-boyutlu Kapranov) karşılıklılık ilkesi aracılığıyla, $V|_{X_o}$ motifine bir $\mathscr{L}(V|_{X_o})$ vektör uzayı atanır. $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{A}_{X_o}})$ grubunun $\mathscr{L}(V|_{X_o})$ vektör uzayı üzerine etkisi vardır.
– Bir önceki maddenin şartları altında, $\mathfrak{p}$ şemasının fonksiyon cismi üzerinde bir $V|_{\mathfrak{p}}$ motifine, $\mathrm{GL}(\bullet)$ grubu için yerel/küresel 0-boyutlu Kapranov karşılıklılık ilkesi aracılığıyla bir "halka elemanı" $L_{\mathfrak{p}}(V,s) \in \mathbb{Q}[q^{-s}]$ atanır. Grup etkisi yokur.

Bu $\mathrm{GL}(\bullet)$ grubu için tanımlı otomorf objeler ile X üzerinde tanımlı motifler arasındaki ilişki ise Kapranov'un aşağıdaki sanıtı ile açıklanmaktadır.

Sanıt 5 ($\mathrm{GL}(\bullet)$ **grubu için küresel Kapranov karşılıklılık ilkesi).** *X ile 2-boyutlu bir şema gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki*

(2 : 2) *X şemasının genel bir noktası üzerinde tanımlı bir V motifi verilsin. Öyle bir*

$$V \rightsquigarrow \mathbb{L}(V)$$

eşlemesi tanımlıdır ki :

– $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{A}_X} \oplus V_{\mathbb{A}_X})$ *grubu 2-vektör uzayı $\mathbb{L}(V)$ üzerine etki eder;*
– *X üzerine tanımlı motiflerden oluşan her*

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

makul kısa kesin dizisine karşılık, bu makul dizi tarafından belirlenen $GL(V_{\mathbb{A}_X} \oplus V_{\mathbb{A}_X})$ grubunun parabolik altgrubunun etkisinden bağımsız, bir

$$\mathbb{L}(V') \otimes \mathbb{L}(V'') \Rightarrow \mathbb{L}(V)$$

2-morfizması vardır

şartlarını sağlayan doğal ve biricik bir eşleme vardır. Bu eşleme ayrıca $\mathrm{GL}(\bullet)$ grubu için küresel 1-boyutlu ve 0-boyutlu Langlands karşılıklılık ilkeleri ile uyumlu olmalıdır :

(2 : 1) *V motifini dallanmamış yapan X şemasının her 1-boyutlu altşeması X_o için, 1-boyutlu X_o şemasının genel noktası üzerinde tanımlı $V|_{X_o}$ motifini V'yi X_o şemasına kısıtlayarak elde etmek mümkündür. Bu durumda, öyle bir*

$$V|_{X_o} \rightsquigarrow \mathscr{L}(V|_{X_o})$$

eşlemesi vardır ki :

– $\mathrm{GL}((V|_{X_o})_{\mathbb{A}_{X_o}})$ *grubu $\mathscr{L}(V|_{X_o})$ (1-)vektör uzayına etki eder. Böylece, Flath'ın Teoremi neticesinde,*

$$\mathscr{L}(V|_{X_o}) = \bigotimes_{\mathfrak{p} \in X_o} \mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(V|_{X_o})$$

eşitliği elde edilir.
– *X üzerinde tanımlı V, V', V'' motifleri verilsin. Bu durumda, X_o üzerinde tanımlı motifler için oluşturulmuş olan*

$$0 \to V'|_{X_o} \to V|_{X_o} \to V''|_{X_o} \to 0$$

makul kısa kesin dizisine karşılık bir

$$\mathscr{L}(V'|_{X_o}) \otimes \mathscr{L}(V''|_{X_o}) \to \mathscr{L}(V|_{X_o})$$

morfizması vardır. Bu morfizma, makul kısa kesin dizi tarafından belirlenen $GL((V|_{X_o})_{\mathbb{A}_{X_o}})$ grubunun parabolik altgrubunun etkisinden bağımsızdır.
– *Tüm dallanmamış $X_o \subset X$ altşemaları üzerinden $\mathscr{L}(V|_{X_o})$ vektör uzaylarının tensör çarpımını alarak, X şeması üzerinde tanımlı V motifine karşılık gelen*

$$\mathscr{L}(V) = \bigotimes_{\substack{X_o \subset X \\ \text{dallanmamış.}}} \mathscr{L}(V|_{X_o})$$

"küresel $\mathscr{L}$-uzayı" vardır;

$(2:0)$ *V motifini dallanmamış yapan X şemasının her 1-boyutlu X_o altşeması ve bu X_o şemasının her 0-boyutlu altşeması $\mathfrak{p}$ için V motifini $\mathfrak{p}$ altşemasına kısıtlayarak 0-boyutlu $\mathfrak{p}$ şeması üzerinde bir $V\mid_{\mathfrak{p}}$ motifi tanımlanır. Bu durumda, öyle bir*

$$V\mid_{\mathfrak{p}} \rightsquigarrow L_{\mathfrak{p}}(V,s) = \det(1-q^{-s}\,\mathrm{Frob}\mid_{(V\mid_{\mathfrak{p}})}) \in \mathbb{Q}[q^{-s}]$$

eşlemesi vardır ki :

– *X üzerinde tanımlı V, V', V'' motiflerinin $\mathfrak{p}$ altşemasına kısıtlanması ile inşa edilen $\mathfrak{p}$ üzerinde tanımlı motifler*

$$0 \to V'\mid_{\mathfrak{p}} \to V\mid_{\mathfrak{p}} \to V''\mid_{\mathfrak{p}} \to 0$$

kısa kesin dizisini vermesi durumunda, bu kısıtlanmış motiflere atanan halka elemanları

$$L_{\mathfrak{p}}(V')L_{\mathfrak{p}}(V'') = L_{\mathfrak{p}}(V)$$

eşitliğini sağlayacaktır.

– *V motifini dallanmamış yapan X şemasının her 1-boyutlu X_o altşeması ve bu X_o şemasının her 0-boyutlu altşeması $\mathfrak{p}$ için tanımlı $L_{\mathfrak{p}}(V,s)$ halka elemanlarını $\mathfrak{p}\in X_o\subset X$ üzerinden çarparak*

$$L(V,s) = \prod_{\substack{X_o\subset X\\ unram.}} L((V\mid_{X_o}),s) = \prod_{\substack{X_o\subset X\\ unram.}} \prod_{\mathfrak{p}\in X_o} L_{\mathfrak{p}}(V,s)$$

V motifinin küresel L-fonksiyonu elde edilir.

X şeması üzerinde tanımlı V motifine atanan 2-vektör uzayı $\mathbb{L}(V)$ ile küresel $\mathscr{L}$-uzayı $\mathscr{L}(V)$ arasındaki bağıntının Weil'in geliştirmiş olduğu *ters Hecke kuramı* benzeri bir kuram ile açıklanabileceği düşünülmektedir. Bunun sebebi şu şekilde açıklanabilir : ters Hecke kuramı sonucu $\mathscr{L}(V\mid_{X_o})$ temsilinin otomorf olması için halka elemanları üzerine ne gibi şartların konulması gerektiği bilinmektedir.

5. GRUPLARIN 2-TEMSİLLERİ VE KATO-PARSHIN KURAMI

$\mathrm{GL}(\bullet)$ grubu için yerel veya küresel Langlands karşılıklılık ilkesi, $\mathrm{GL}(1)$ durumunda yerel veya küresel sınıf cisim kuramına dönüşecek şekilde normalleştirilmektedir. Benzeri durum $\mathrm{GL}(\bullet)$ grubu için yerel veya küresel Kapranov karşılıklılık ilkesi için de söz konusudur.

Bu makalede ele alınan 2-boyutlu durumda, 2-boyutlu yerel cisim F üzerinde tanımlı bir V motifine, $\mathrm{GL}(V_F\oplus V_F)$ grubunun $\mathbb{L}(V)$ 2-vektör uzayı üzerine bir 2-temsili karşılık gelmektedir. V motifinin boyutu 1 olduğu durumda ise $\mathbb{L}(V)$ 2-vektör uzayı da 1-boyutlu olacaktır. Bu durumda, Suslin'in önemli bir teoremi neticesinde (bkz [28]), Kapranov'un tekabülü Kato ve Parshin'in 2-boyutlu yerel sınıf cisim kuramına dönüşecektir.

Küresel durumda da, X bir 2-boyutlu bir şema olsun ve X üzerinde tanımlı bir motif V olsun. Bu durumda da V motifine, $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{A}_X}\oplus V_{\mathbb{A}_X})$ grubunun $\mathbb{L}(V)$ 2-vektör uzayı üzerine bir 2-temsili karşılık gelmektedir. Benzeri şekilde, V motifinin boyutu 1 olduğu durumda, $\mathbb{L}(V)$ 2-vektör uzayı da 1-boyutlu olacaktır. Bu durumda, tekrar Suslin'in neticesi sonucu Kapranov'un tekabülü Kato ve Parshin'in 2-boyutlu küresel sınıf cisim kuramına dönüşecektir.

KAYNAKLAR

[1] J. Arthur, *The principle of functoriality*, Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 2002, 39–53.

[2] J. Arthur, *A note on the automorphic Langlands group*, Canad. Math. Bull. **45**, 2002, 466–482.

[3] A. A. Beilinson, *Residues and adèles*, Func. Analysis and its Appl. **14**, 1980, 44–45.

[4] J. N. Bernstein ve A. V. Zelevinski, *Representations of the group* $\mathrm{GL}(n,F)$ *where F is a local non-archimedean field*, Russian Math. Surveys **31**, 1976, 1–68.

[5] L. Clozel, *Motifs et formes automorphes : Applications du principe de fonctorialité*, Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions (L. Clozel and J. S. Milne eds.) vol. 1, Perspectives in Math. **10**, Academic Press, 1990, 77–159.

[6] P. Deligne,*Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Automorphic Forms, Representations, and L-functions (A. Borel and W. Casselman eds.), Proc. Sympos. Pure Math. **33** Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, 313–346.

[7] S. I. Gelfand ve Yu. I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1996.

[8] M. Harris ve R. Taylor, *The Geometry and Cohomology of Simple Shimura Varieties*, Ann. of Math. Studies **151**, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2001.

[9] A. Huber, *On the Parshin-Beilinson adèles for schemes*, Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg **61**, 1991, 249–273.

[10] K. İ. İkeda, *Multi-dimensional Langlands Functoriality Principle* (hazırlık aşamasında kitap).

[11] M. M. Kapranov, *Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory*, Functional Analysis at the Eve of the 21st Century. In Honour of the Eightieth Birthday of I. M. Gelfand, vol. I, Progress in Math. vol. **132**, Birkhäuser, 119–152.

[12] K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups I, II, III*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **26** (1979), 303–376; **27** (1980), 603–683; **29** (1982), 31–43.

[13] K. Kato, *Existence theorem for higher local fields*, Invitation to Higher Local Fields (I. Fesenko and M. Kurihara, eds.), Geometry and Topology Monographs **3**, Univ. of Warwick, Warwick, Coventry, 2000, pp. 165–195.

[14] K. Kato ve S. Saito, *Two-dimensional class field theory*, Galois Groups and their Representations, Adv. Stud. Pure Math., vol. 2 (Y. Ihara, ed), Kinokuniya-North Holland, Amsterdam, 1983, 103-152.

[15] R. P. Langlands, *Problems in the theory of automorphic forms*, Lectures in Modern Analysis and Applications III (C. Taam, ed.), Lecture Notes in Math. **170**, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1970, pp. 18-61.

[16] R.P. Langlands, *On Artin's L-functions*, Rice Univ. Studies **56** (2), Rice University, Texas, 1970, pp. 23-28.

[17] R. P. Langlands, *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein märchen*, Automorphic Forms, Representations, and L-functions I & II, Proc. Sympos in Pure Math. **33**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1979, Part II, pp. 205–246.

[18] R. P. Langlands, *Review of Haruzo Hida's p-adic automorphic forms on Shimura varieties*, Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 2007, 291-308.

[19] Yu. I. Manin ve A. A. Panchishkin, *Introduction to Modern Number Theory : Fundamental Problems, Ideas and Theories (2^{nd} ed.)*, Encyclopedia of Mathematical Sciences **49**, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 2005.

[20] P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Math. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1967.

[21] J. Murre, *Lectures on motives*, Transcendental aspects of algebraic cycles : Proceedings of the Grenoble Summer School 2001 (S. Müller-Stach and C. Peters, eds), London Math. Soc. Lecture Notes Series vol. 313, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, pp. 123–170.

[22] A. N. Parshin, *Class fields and algebraic K-theory*, Uspekhi. Mat. Nauk **30**, 1975, 253–254.

[23] A. N. Parshin, *On the arithmetic of two-dimensional schemes I: repartitions and residues*, Izv. Akad. Nauk. SSSR **40**, 1976, 736–773.

[24] A. N. Parshin, *Abelian coverings of arithmetic schemes*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **243**, 1978, 1438–1442.

[25] A. N. Parshin, *Local class field theory*, Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR **165**, 1985, 143–170.

[26] A. N. Parshin, *Questions and remarks to the Langlands programme*, Russ. Math. Surv. **67** (3), 2012, 509–539.

[27] D. Ramakrishnan,*Pure motives and automorphic forms*, Motives I & II, Proc. Sympos. Pure Math. **55**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1994, Part **II**, pp. 411–446.

[28] A. A. Suslin, *Homology of* GL_n*, characteristic classes and Milnor K-theory*, Lecture Notes in Math. **1046**, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1989, pp. 357–375.

[29] J. Tate, *Number theoretic background*, Automorphic Forms, Representations, and L-functions (A. Borel and W. Casselman eds.), Proc. Sympos. Pure Math. **33** Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, 3–26.

[30] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of generalized free products I*, Annals of Math. **108** (1978),135-204.

YEDİTEPE ÜNİVERSİTESİ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 26 AĞUSTOS YERLEŞİMİ, İNÖNÜ MAH., KAYIŞDAĞI CAD., 34755, ATAŞEHİR, İSTANBUL

E-mail address: ilhan.ikeda@yeditepe.edu.tr